Program stručnog usavršavanja
**Metode rešavanja matematičkih zadataka**
**Z. Lozanov-Crvenković**

1. Neka su $a,b,c$ tri različita cela broja i neka je $P(x)$ polinom sa celobrojnim koeficijentima. Da li može istovremeno da važi

$$P(a)=b,\quad P(b)=c,\quad P(c)=a\ ?$$

2.
   (a) Za koje $n\in\mathbb{N}$ $\quad x^2+x+1 \mid x^{2n}+x^n+1$
   (b) Za koje $n\in\mathbb{N}$ $\quad 37 \mid 1\underbrace{00\cdots0}_{n}1\underbrace{00\cdots0}_{n}1$ ?

3. Da li možemo dobiti $x$ pomoću polinoma $f(x)$ i $g(x)$ operacijama sabiranja, oduzimanja i množenja ako je
a) $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x^2+2$.
b) $f(x)=2x^2+x$, $g(x)=2x$.
c) $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x^2-2$.

4. Za sve $x\in\mathbb{R}$, funkcija $f(x)$ zadovoljava uslov

$$f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x).$$

Pokazati da je $f(x)$ periodična.

5. Ako je svaki presek nekog tela sa proizvoljnom ravni krug, onda je to telo lopta. Dokazati.

6. Hokejaš se igra sa tri paka $A,B,C$ na ledu tako da kada udari pločicu ona prođe u pravoj liniji između preostale dve. Da li posle 1001 udaraca može da se desi da se tri paka vrate u početni položaj?

7. Ako je $n$ veći od 2, onda između $n$ i $n!$ postoji najmanje jedan prost broj.

8. Dokazati da za svaki prirodan broj $n$ postoji beskonačno mnogo rešenja jednačine

$$x^n+y^n=z^{n+1}$$

9. Neka su $a,b,r$ prirodni brojevi. Pokazati da je $(a+b\sqrt{r})^n+(a-b\sqrt{r})^n=2p$ gde je $p$ prirodan broj.

10. Pokazati da je $(5-2\sqrt{6})^{1004}<0{,}1$.

11. Naći prvu cifru pre i posle decimalnog zareza u broju $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2008}$.

Čuvena Goldbahova hipoteza kaže da je svaki paran broj $n>2$ zbir dva prosta broja.

$$4 = 2+2, \quad 6 = 3+3, \quad 8 = 5+3, \quad 10 = 5+5, \quad 12 = 7+5.$$

12. Dokazati da je svaki prirodan $n > 11$ broj zbir dva složena broja.
13. Dokazati da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva koji ne mogu biti suma dva prosta broja.
14. Dokazati da je Goldbahova hipoteza ekvivalentna sledećem:
Svaki paran broj $n > 4$ je zbir 3 prosta broja.

1. U prostoriji koja ima jedan ulaz i jedan izlaz nalazi se 100 sijalica poređanih u niz i numerisanih brojevima od 1 do 100, tim redom, od ulaza do izlaza. Svaka sijalica ima svoj prekidač. Sto učenika stoji u redu ispred prostorije. Ulazi prvi učenik i pali sve sijalice. Drugi učenik ulazi i gasi svaku drugu sijalicu. Treći menja stanje svake treće sijalice, to jest gasi treću sijalicu, pali sijalicu broj 6, gasi broj 9, pali sijalicu broj 12, itd. Četvrti menja stanje svake četvrte sijalice, peti svake pete, itd. Ovo se nastavlja sve dok ne dođe na red i stoti učenik. Kakvo je konačno stanje sijalice broj 64 kada prođe i poslednji učenik? Koje će sijalice svetleti kada prođu svi učenici?

2. Neka je A broj koji ima 2007 cifara i deljiv je sa 9. Označimo zbir cifara broja A sa B, a zbir cifara broja B sa C. Naći zbir cifara broja C.

3. Naći prirodne brojeve $a, b, c$ za koje važi
$$a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \quad \text{i} \qquad a^2 = 2(b+c).$$
4. Da li postoji prirodan broj koji se pri precrtavanju prve cifre smanjuje
 a) 57 puta  b) 58 puta?

5. Neka su $p_1, p_2, ..., p_{24}$ prosti brojevi veći od 3. Dokaži da je $p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_{24}^2$ deljivo sa 24.

6. Na belom pravougaonom listu hartije čije su dimenzije 21cm i 30cm učenik je napravio mrlje od mastila. Ukupna površina mrlja je 314cm$^2$. Dokazati da na listu postoje bar dve tačke, simetrične u odnosu na jednu osu simetrije pravougaonika, koje su ostale bele.

7. Mogu li se brojevi $1, 2, ..., 100$ podeliti u tri grupe tako da zbir brojeva u prvoj grupi bude deljiv sa 102, u drugoj grupi deljiv sa 203 i u trećoj grupi deljiv sa 304?